

Bewehrte Betondecken mit Strahlungsheizung

System Gebrüder Sulzer Aktiengesellschaft, Winterthur

Berechnung
der Temperaturspannungen einer Platte
mit unbeheiztem Randstreifen

ZÜRICH, MAI 1949

Berechnung der Temperaturspannungen einer Platte mit unbeheiztem Randstreifen

von

Dipl.-Ing. E. Schmidt,
wissenschaftlicher Mitarbeiter der EMPA,
Zürich

Die Berechnung der Beanspruchungen der Eisenbeton-Konstruktionen mit Strahlungsheizung aus

1. Erwärmung der Decken,
2. Temperaturunterschied in den Decken oben – unten,
3. eventueller Stützen-Verkürzung oder -Verlängerung

ist in der Regel mit den üblichen Methoden der Baustatik einfach durchzuführen. (Stockwerkrahmen unter dem Einfluss ungleicher Temperaturen mit Stützen-Verlängerungen oder -Verkürzungen.)

Im folgenden wird eine andere Beanspruchungsart behandelt, welche in den meisten Fällen die höchsten Wärmespannungen ergibt, und zwar durch

verschieden starke Erwärmung der verschiedenen Partien des Deckengrundrisses,
insbesondere

die mangelnde Beheizung der Randstreifen

einer Decke. Das Problem, als «Scheibenproblem» aufgefasst, kann wie folgt formuliert werden:

es sind die Spannungen einer Scheibe aus homogenem und isotropem, elastischem Material zu bestimmen, welche infolge verschieden hoher Temperatur gemäss Abb. 1 wachgerufen werden.

Von besonderem Interesse ist dabei die grösste Dehnung « ε » bzw. Zugspannung in der Mitte des unbeheizten Randstreifens.

Im Sonderfall eines verhältnismässig schmalen Randstreifens

$$\frac{b}{l} \text{ sehr klein}$$

lässt sich diese Spannung angeben zu

$$\sigma_{max} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T,$$

wobei E = Elastizitätsmodul,

α = linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient,

ΔT = Temperaturdifferenz $T_S - T_R$.

Decken-Grundriss, idealisiert:

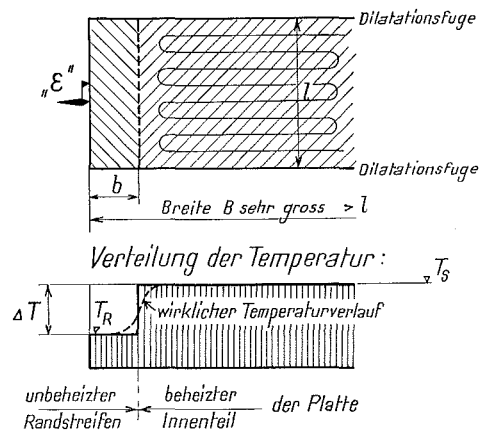


Abb. 1

Beheizte Platte mit kaltem Randstreifen
als Scheibenproblem

Für andere Fälle und auch zur Ermittlung des Spannungszustandes der Scheibe mit schmalen Randstreifen in der Nähe der Ecken dient die nachfolgende Berechnungsweise.

Die Berechnung gestaltet sich am übersichtlichsten, wenn man sich den zu untersuchenden

Lastfall «Temperaturunterschied» als Überlagerung der beiden Fälle «1» und «2» – Abb. 2 – vorstellt.

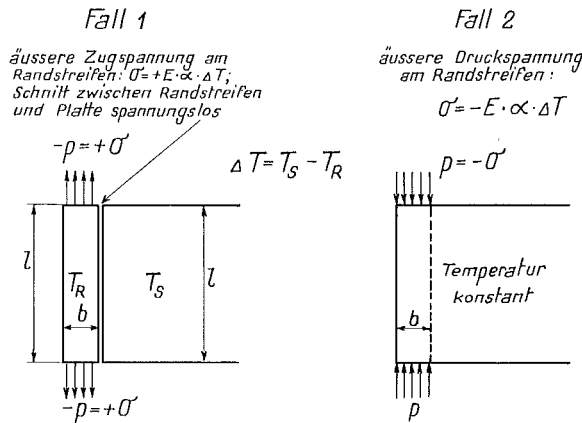


Abb. 2

Überlagerung zweier Lastfälle

Für die mit Fall «2» bezeichnete Aufgabe und im Sonderfall $\frac{b}{l} = 0$ ist es möglich, sich auf zwei bekannte Lösungen der Differentialgleichungen der Scheibenspannungen¹⁾ stützend, nämlich derjenigen nach Michell²⁾ für die Einzelast an einer ausspringenden Ecke und nach Miura³⁾ für das Moment an derselben Stelle, die gestellte Aufgabe zu lösen.

Für die rechteckige Ecke und mit einheitlichen Bezeichnungen laufen die Lösungen – Abb. 3 –:

aus P:
$$F = -\frac{P}{\sqrt{2}} \cdot r \cdot \varphi \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sin \varphi}{2} + 1 & -\frac{\cos \varphi}{2} - 1 \end{bmatrix} \quad 1)$$

aus M:
$$F = -\frac{M}{2} \cdot \sin 2\varphi \dots \dots \dots 2)$$

Bezeichnungen:

Airy'sche Spannungsfunktion: F;

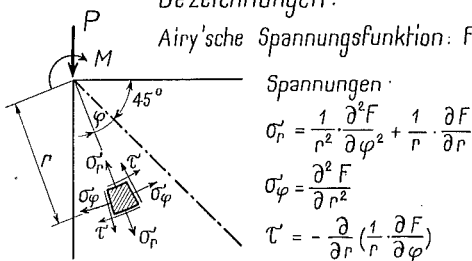


Abb. 3

Ausspringende Ecke

Wir gehen nun so vor, dass wir unsere Streckenlast «p» neben der Wandecke durch eine Einzellast und ein Moment ersetzen, welche am Eckpunkt selbst angreifen, und den nach Gleichungen 1) und 2) errechneten Spannungszustand als in der ferneren Nachbarschaft der Ecke auch für «p» gültig annehmen. Für die nächste Umgebung der Ecke – Abb. 4 – wird eine besondere Untersuchung durchgeführt:

ungen 1) und 2) errechneten Spannungszustand als in der ferneren Nachbarschaft der Ecke auch für «p» gültig annehmen. Für die nächste Umgebung der Ecke – Abb. 4 – wird eine besondere Untersuchung durchgeführt:

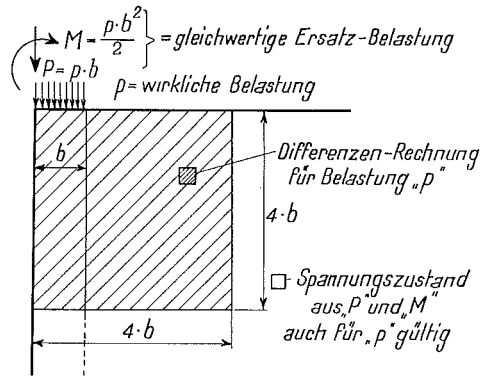


Abb. 4

Abgrenzung des Gebietes der Differenzenrechnung

Die Elastizitätsbedingung der Scheibe, als Differenzengleichung im kartesischen Koordinatensystem für die Airy'sche Spannungsfunktion geschrieben, lautet – Abb. 5 –:

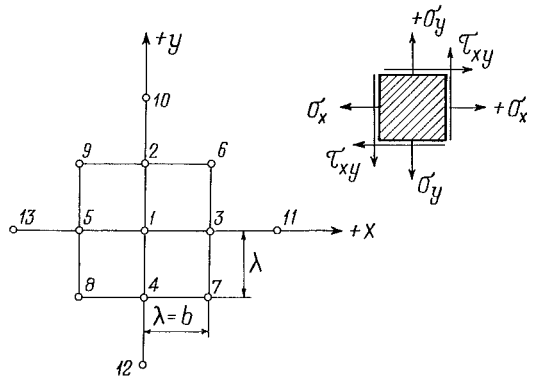


Abb. 5

Achsennetz für Differenzenrechnung

$$20 \cdot F_1 - 8 \cdot (F_2 + F_3 + F_4 + F_5) + 2 \cdot (F_6 + F_7 + F_8 + F_9) + 1 \cdot (F_{10} + F_{11} + F_{12} + F_{13}) = 0 \quad 3)$$

Die Spannungen ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\Delta^2 F}{\Delta y^2} = \frac{F_5 - 2F_1 + F_3}{\lambda^2} \\ \sigma_y &= \frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} = \frac{F_4 - 2F_1 + F_2}{\lambda^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{\Delta^2 F}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{(F_8 + F_6) - (F_7 + F_9)}{\lambda^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 4)$$

Wir legen in das Eckgebiet der Platte $4b \times 4b$ – siehe Abb. 4 – ein Netz von der Feldweite «b». Die Gleichung 3), für die 9 inneren Netzknoten angeschrieben, liefert die 9 linearen Gleichungen zur Bestimmung der F-Werte an diesen Punkten.

Vorher sind die Randbedingungen festzulegen – siehe Abb. 6 –:

Achsen 6 und 7 sowie f und g: Die Werte «F» gemäss Gleichungen 1) und 2); Zahlenwerte für $P = 1$, $M = \frac{1}{2}$ ($\lambda = b = 1$) angeschrieben y – Achse = freier Rand links:

$$\sigma_x = \frac{\Delta^2 F}{\Delta y^2} = 0: F \text{ verläuft linear zwischen den Punkten } b_1 \text{ und } b_7$$

x – Achse = freier Rand oben, Punkte d_2 bis g_2 :

$$\sigma_y = \frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} = 0: F \text{ verläuft linear}$$

Punkt c_2 : $\sigma_y = \frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} = -\frac{1}{2}$ (Mittel von 0 und -1)

Punkt b_2 : $\sigma_y = -1$

x – und y – Achse – beide freie Ränder:

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta^2 F}{\Delta x \cdot \Delta y} = 0;$$

die Verwindung der F-Fläche am Rande ist gleich Null. Diese letzte Bedingung kann infolge der geringen verbleibenden Unstimmigkeit zwischen Differenzen- und Differentialrechnung nicht ganz genau eingehalten werden.

Aus diesen Bedingungen sind die in Abb. 6 angeschriebenen Randwerte von F berechnet; damit steht der Aufstellung der 9 Gleichungen für die Spannungsfunktion F in den Netzknoten 1 bis 9, gemäss der Gleichung 3), nichts mehr im Wege.

Die Auflösung des Gleichungssystems ist aus der Tabelle auf Seite 6 ersichtlich.

Der Spannungszustand einer rechteckigen Wandecke mit einer kurzen Streckenlast $p = 1$ innerhalb der Ecke ist in Abb. 7 dargestellt. Die Schubspannungen wurden, als von geringerer Bedeutung, ausser acht gelassen. Die Ergebnisse lassen sich unmittelbar auf die beheizte Decke mit kaltem Randstreifen, dessen Länge gross verglichen mit der Breite des Randstreifens ist, übertragen – Abb. 8 –. Sie wurden auch für die Nachrech-

nung der im Bürgerspital Basel durchgeführten Messungen benützt – vgl. Bericht Nr. 134 – Ergänzung 1941–1949, Abschnitt C 3, Abb. 22 –.

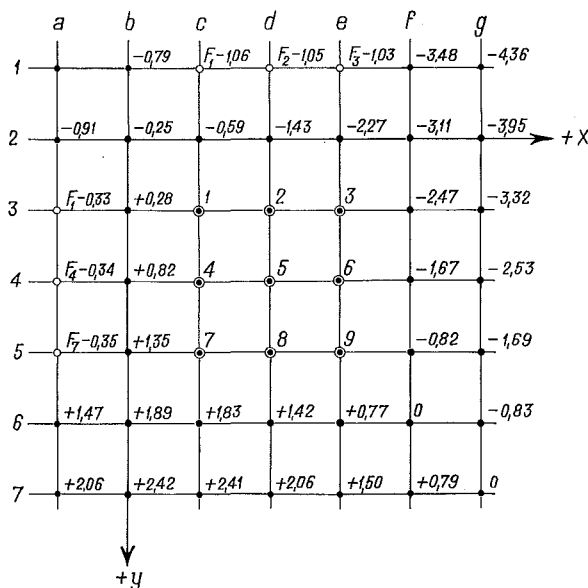


Abb. 6

Randbedingungen für die Differenzenrechnung
– Werte der Spannungsfunktion «F» –

Falls die Länge der Platte ein endliches Vielfaches der Breite des Randstreifens ist

$$\text{– etwa } \frac{b}{l} = \frac{1}{10} \text{ bis } \frac{1}{5} \text{ –}$$

so lässt sich eine gute Näherungslösung finden durch Anwendung der vorliegenden Lösung auf die obere und untere Begrenzung; es verbleiben an diesen Grenzlinien relativ kleine Spannungen σ_y und τ_{xy} , welche durch äussere Kräfte umgekehrten Vorzeichens, deren Auswirkungen auf die Platte mit genügender Genauigkeit geschätzt werden können, eliminiert werden.

Der Spannungszustand einer beheizten Platte mit kaltem Randstreifen für drei verschiedene Längen der Platte

$$\text{– } \frac{b}{l} = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, 0 \text{ –}$$

ist in der Abb. 8 dargestellt. Wenn man beachtet, dass die Temperatur zwischen dem Innenteil der Platte und dem Randstreifen nicht sprungweise, sondern stetig verläuft, so erkennt man, dass der bezüglich Temperaturspannungen am meisten gefährdete Teil der Platte die Mitte des kalten Randstreifens ist. Das Maximum der

Zugspannung ist von der Grössenordnung

$$\text{bei } \frac{b}{l} = 0 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{5}$$

$$\sigma \sim 1 \cdot 0,4 \cdot 0,2 \cdot E \cdot a \cdot \Delta T$$

Die Massnahmen zur Verhinderung, bzw. Unschädlichmachung ungünstiger Auswirkungen der Beheizung massiver Betonplatten, in der Reihenfolge ihrer Wirksamkeit aufgezählt, sind:

1. Gleichmässige Beheizung der ganzen Platte und Isolierung derselben gegen die Aussenluft.

2. Wo dies nicht gut möglich ist: Wahl einer geringen Plattenlänge «l» zwischen den Dilatationsfugen, zugleich aber einer nicht zu geringen Breite «b» des Randstreifens – Abb. 1 –, womit der Temperaturunterschied ausgeglichen und die Zugspannungen gemildert werden.

3. Zusätzliche Bewehrung des kalten Randstreifens zur Verhinderung der Bildung grösserer Risse.

Auflösung des Gleichungssystems

Punkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F =	+ 0,004	- 0,740	- 1,595	+ 0,630	+ 0,009	- 0,799	+ 1,240	+ 0,738	+ 0,007

Die Scheibenspannungen, gemäss Gleichungen 4) aus den Werten F abgeleitet, sind

Punkt	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b ₈
σ _x	0	0	0	0	0	0	0
σ _y	- 1	- 0,88	- 0,72	- 0,57	- 0,48	- 0,388	- 0,329
τ _{xy}	0	0	0	0	0	0	0
Punkt	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	
σ _x	+ 0,13	+ 0,03	- 0,02	- 0,02	- 0,01	- 0,004	
σ _y	- 1,00/0	- 0,46	- 0,43	- 0,39	- 0,35	- 0,320	
τ _{xy}	0	+ 0,09	+ 0,10	+ 0,08 ⁵	+ 0,06	+ 0,048	
Punkt	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	d ₆	d ₇	
σ _x	+ 0,35	+ 0,04	0	- 0,05	- 0,04	- 0,018	
σ _y	0	- 0,13	- 0,19	- 0,23	- 0,24	- 0,232	
τ _{xy}	0	+ 0,06	+ 0,09	+ 0,09	+ 0,08	+ 0,069	
Punkt	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	
σ _x	+ 0,32	+ 0,12	+ 0,01	- 0,04	- 0,03	- 0,025	
σ _y	0	- 0,01	- 0,06	- 0,09	- 0,12	- 0,155	
τ _{xy}	0	0	+ 0,04 ⁵	+ 0,06 ⁵	+ 0,07	+ 0,070	
Punkt	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	
σ _x	+ 0,27	+ 0,16	+ 0,05	- 0,03	- 0,03	- 0,025	
σ _y	0	+ 0,03	+ 0,01	- 0,04	- 0,06	- 0,098	
τ _{xy}	0	- 0,00 ⁵	+ 0,01	+ 0,03	+ 0,05	+ 0,055	
Punkt	g ₂	g ₃	g ₄	g ₅	g ₆	g ₇	h ₂
σ _x	+ 0,232	+ 0,145	+ 0,070	+ 0,019	- 0,006	- 0,019	+ 0,199
σ _y	0	0	- 0,008	- 0,024	- 0,042	- 0,059	0
τ _{xy}	0	- 0,014	- 0,004	+ 0,013	+ 0,028	+ 0,039	0

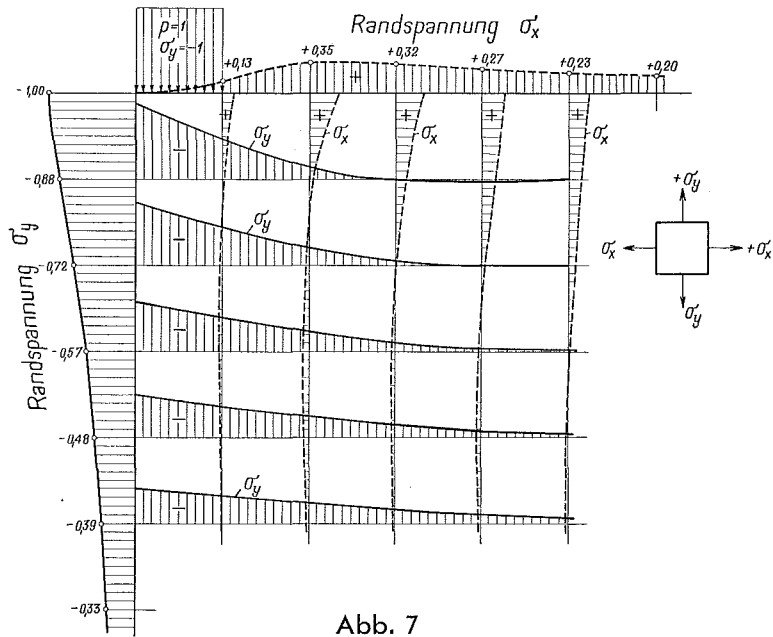


Abb. 7

Spannungen in einer rechteckigen Scheibenecke infolge einer Streckenlast

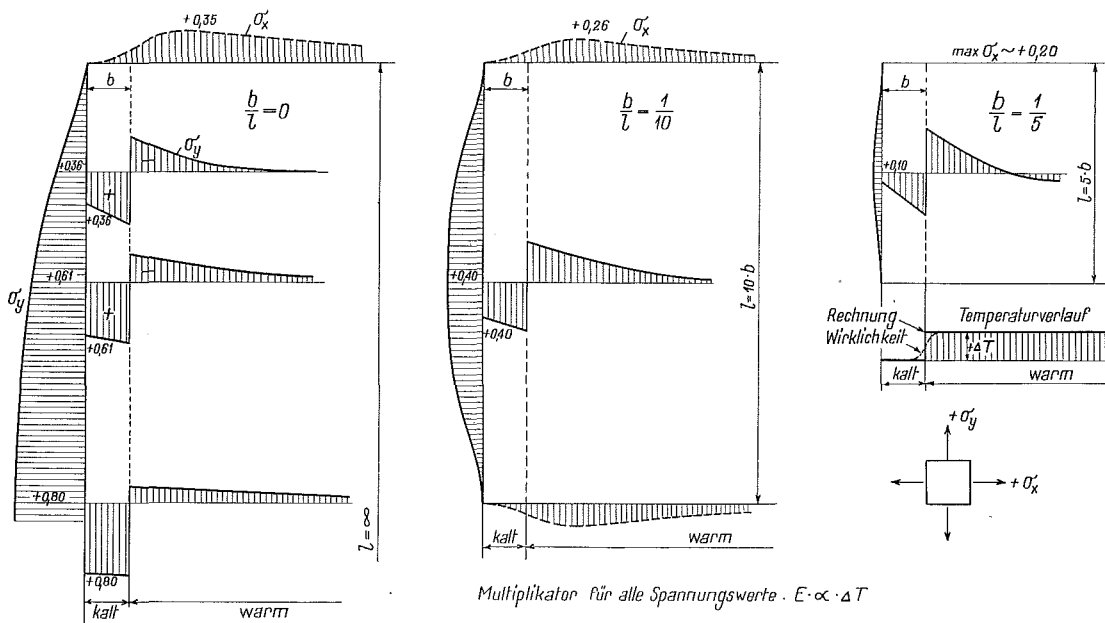


Abb. 8

Spannungen in einer beheizten Platte mit kaltem Randstreifen

ANMERKUNGEN

- 1) Über den ebenen Spannungszustand der Scheiben sowie zum Begriff und der Theorie der Airy'schen Spannungsfunktion ist das Nötige in jedem Lehrbuch der Elastizitätstheorie zu finden, wie Timoshenko: «Elastizitätstheorie» und Föppl: «Drang und Zwang I.»
- 2) J. H. Michell: Proc. London Math. Soc., vol. 34, p. 134, 1902.
- 3) Akira Miura: «Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern.» Springer-Verlag, Berlin, 1928.